第31講　四面体について

31　次の各問いに答えよ.

(1)　四面体 ABCD が AB＝3，AC＝4，AD＝5，AB⊥AC，AC⊥AD，AD⊥AB を満たしている．頂点 A から平面 BCD へ下ろした垂線の足を H とするとき，線分 AH の長さを求めよ.

(2)　四面体 ABCD が AB＝AC＝AD＝5，BC＝CD＝DB＝6 を満たしている．この四面体の体積を求めよ.

(3)　四面体 ABCD が AB＝CD＝x，AC＝BC＝AD＝BD＝2 を満たしている．この四面体の体積の最大値を求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 31 講　四面体について

31　半径 r の球面上に 4 点 A，B，C，D がある．四面体 ABCD の各辺の長さは

$$AB=\sqrt{3},\ AC=AD=BC=BD=CD=2$$

を満たしている．このとき r の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$r=\dfrac{\sqrt{11}}{3}$　　㋑　$r=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$　　㋒　$r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 31 講　四面体について

31　次の各問いに答えよ．

(1)　四面体 ABCD が AB＝3，AC＝4，AD＝5，AB⊥AC，AC⊥AD，AD⊥AB を満たしている．頂点 A から平面 BCD へ下ろした垂線の足を H とするとき，線分 AH の長さを求めよ．

(2)　四面体 ABCD が AB＝AC＝AD＝5，BC＝CD＝DB＝6 を満たしている．この四面体の体積を求めよ．

(3)　四面体 ABCD が AB＝CD＝x，AC＝BC＝AD＝BD＝2 を満たしている．この四面体の体積の最大値を求めよ．

【答】　(1) $\dfrac{60}{\sqrt{769}}$　(2) $3\sqrt{39}$　(3) $\dfrac{16}{27}\sqrt{3}$ ($x=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ のとき)

【解答】

(1)　この四面体の体積を計算するとき，底面を三角形 BCD と考えると高さは AH となる．

ここで AB＝3，AC＝4，AD＝5 より BC＝5，CD＝$\sqrt{41}$，DB＝$\sqrt{34}$ となるので，余弦定理を用いると

$$\cos\angle CBD=\frac{5^2+(\sqrt{34})^2-(\sqrt{41})^2}{2\cdot5\cdot\sqrt{34}}=\frac{9}{5\sqrt{34}}$$

となり，$\sin\angle CBD=\dfrac{\sqrt{769}}{5\sqrt{34}}$ を得る．よって三角形 BCD の面積は

$$\frac{1}{2}\times BD\times BC\times\sin\angle CBD=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot5\cdot\frac{\sqrt{769}}{5\sqrt{34}}=\frac{\sqrt{769}}{2}$$

となる．

また，この四面体の体積は $\dfrac{1}{6}\times AB\times AC\times AD=\dfrac{1}{6}\cdot3\cdot4\cdot5=10$ であるから

$$\frac{\sqrt{769}}{2}\times AH\times\frac{1}{3}=10\qquad\therefore\quad AH=\boldsymbol{\frac{60}{\sqrt{769}}}$$

(2)　点 A から平面 BCD に下ろした垂線の足を H とすると，AB＝AC＝AD，BC＝CD＝DB より，H は三角形 BCD の重心となる．よって CD の中点を M とするとき，BH：HM＝2：1 である．

また BC＝CD＝DB＝6 より BM＝$3\sqrt{3}$ となるので，BH＝$2\sqrt{3}$ となる．

よって $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$ となる．

三角形 BCD の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot6^2=9\sqrt{3}$ より求める体積は

$$9\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{3\sqrt{39}}$$

(3)　CD の中点を M，AB の中点を N とする．このとき三角形 ACD は AC＝AD の二等辺三角形であるので，AM⊥CD となる．同様に BM⊥CD となるので，CD は ABM を含む平面に垂直である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

このとき三角形 ABM は $\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}$ の二等辺三角形となるので，AB を底辺としたときの高さは MN で，$\mathrm{MN}=\sqrt{\mathrm{AM}^2-\mathrm{AN}^2}=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{2}}$ となる．

ゆえに三角形 ABM の面積は

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{MN}=\frac{x}{2}\sqrt{4-\frac{x^2}{2}}$$

となるので，四面体の体積は

$$\frac{x}{2}\sqrt{4-\frac{x^2}{2}}\times\mathrm{CD}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}x^2\sqrt{8-x^2}\quad\cdots\cdots①$$

となる．

ここで，ABC が三角形である条件と $\mathrm{MN}>0$ より得られる条件 $0<x<2\sqrt{2}$ の範囲で①が最大となるものを考えればよいが，$x^2=t$ とおくと $0<t<8$ であり，

$①=\dfrac{\sqrt{2}}{12}t\sqrt{8-t}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{8t^2-t^3}$ となる．

$8t^2-t^3=f(t)$ とおくと $f'(t)=t(16-3t)$ より $f(t)$ の増減は

t	0	$\cdots$	$\dfrac{16}{3}$	$\cdots$	8
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

となるので，求める体積の最大値は

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\times\frac{16}{3}\sqrt{8-\frac{16}{3}}=\boldsymbol{\frac{16}{27}\sqrt{3}}$$

このとき $x=\sqrt{\dfrac{16}{3}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ である．

第31講　四面体について

31　半径 r の球面上に4点A，B，C，Dがある．四面体ABCDの各辺の長さは

$$AB=\sqrt{3},\ AC=AD=BC=BD=CD=2$$

を満たしている．このとき r の値を求めよ．

【選択肢】

㋐ $r=\dfrac{\sqrt{11}}{3}$　㋑ $r=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$　㋒ $r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【答】 ㋑

【解答】

半径 r の球の中心をOとし，CDの中点をMとおくと，△ABMは1辺が $\sqrt{3}$ の正三角形となる．さらにABの中点をNとすると対称性よりOはMN上に存在する．よって

$$OA^2=ON^2+AN^2 \qquad \therefore\ r=\sqrt{ON^2+\frac{3}{4}} \quad \cdots\cdots①$$

また△BCDの重心をGとすると△OMGと△BMNが相似であることより

$$OM=\frac{GM\times BM}{MN}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

よって

$$ON=MN-OM=\frac{5}{6}$$

①より

$$r=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{3}{4}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{3}}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。